ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1. Вычислить предел

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\sin\frac{x}{2}}{2x-i}\,dx.$$

2. Функция $u\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-x^2\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0,\quad x\in\mathbb{R},\quad u\in\mathbb{R},$$

$$u(0,y)=y,\quad u\in\mathbb{R}.$$

Найти функцию $u(x,y)$ и вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{\gamma}u(x,y)\,dy,$$

где кривая γ — это граница области $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;\begin{smallmatrix}x^2+y^2<1,\\ y<0\end{smallmatrix}\right\}$, ориентированная против часовой стрелки.

3. Найти минимум функционала

$$J(u)=\int\limits_0^1(x+1)\exp\left(\frac{u'(x)}{2}\right)dx,\quad u\in C^2[0,1],$$

на множестве $M=\left\{\;u\in C^2[0,1]\;\middle|\;u(0)=0,\;\;u(1)=0\;\right\}$, и указать экстремаль, доставляющую минимум.

4. Три землекопа подрядились вскопать поле, каждый имеет две лопаты, а сломать лопату во время работы можно с вероятностью $\frac{3}{4}$. Найти вероятность того, что поле будет полностью вскопано, при условии, что хотя бы один землекоп сломал обе лопаты.

5. Решить задачу Коши

$$\Big(u'(x)\Big)^2+u''(x)=u'(x),$$

$$u(0)=0,\quad u'(0)=2.$$

6. Решить уравнение

$$u(x) = \frac{i}{2}\int\limits_0^x u(t)\,dt - \frac{i}{2}\int\limits_x^{2\pi} u(t)\,dt - \exp(ix), \quad 0 \le x \le 2\pi.$$

7. Решить задачу Коши для уравнения Шрёдингера

$$i\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$u(0,x) = x\sin(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} = \Delta u(t,x,y), \quad t > 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(0,x,y) = \exp(y - x^2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

9. Решить задачу Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t,x,y,z)}{\partial t^2} = \Delta u(t,x,y,z), \quad t > 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$u(0,x,y,z) = \frac{1}{1 + (2x + 2y - z)^4}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$\frac{\partial u(0,x,y,z)}{\partial t} = 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

10. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad x^2 + y^2 < 1,$$

$$u(x,y)\Big|_{x^2+y^2=1} = y(x+y)^2.$$

ОТВЕТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

ЗАДАЧА	ОТВЕТ
1.	$\lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\sin\frac{x}{2}}{2x-i}\,dx=\frac{\pi}{2\sqrt[4]{e}}$ $\int\limits_{-R}^{R}\frac{\exp\left(\frac{ix}{2}\right)}{2x-i}\,dx\to 2\pi i\operatorname*{res}\limits_{z=\frac{i}{2}}\frac{\exp\left(\frac{iz}{2}\right)}{2z-i}=\frac{\pi i}{\sqrt[4]{e}},\quad \int\limits_{-R}^{R}\frac{\exp\left(-\frac{ix}{2}\right)}{2x-i}\,dx\to 0$
2.	$u(x,y)=\dfrac{x^3}{3}+y,\qquad \oint\limits_{\gamma}u(x,y)\,dy=\dfrac{\pi}{8}$
3.	$u_*(x)=4x\ln 2-2(x+1)\ln(x+1),\qquad J(u_*)=\dfrac{4}{e}$
4.	$\frac{112}{139}=1-P(A\vert B)=1-\frac{P(AB)}{P(B)}=1-\frac{27\cdot 27}{4096-343}=1-\frac{27\cdot 27}{27\cdot 139},$ A — поле не вскопано (все сломали обе лопаты), B — хотя бы один сломал обе лопаты, $A\subset B$, $P(AB)=P(A)=\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27\cdot 27}{64\cdot 64}=\frac{27\cdot 27}{4096},$ $P(B)=1-\left(\frac{1}{4}\right)^3-3\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2-3\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)^3=$ $=1-\frac{64+9\cdot 16+27\cdot 4+27}{64\cdot 64}=1-\frac{343}{4096}=\frac{3753}{4096}=\frac{27\cdot 139}{4096}$
5.	$u(x)=\ln\left(2e^x-1\right),\quad x>-\ln 2$

ЗАДАЧА	ОТВЕТ
6.	$u(x) = (\pi i - 1 - ix)\exp(ix),$ $u'(x) = iu(x) - i\exp(ix), \quad u(0) + u(2\pi) = -2$
7.	$u(t,x) = (x\sin x - 2it\cos x)\exp(it)$
8.	$u(t,x,y) = \dfrac{\exp\left(t + y - \frac{x^2}{4t+1}\right)}{\sqrt{4t+1}}$
9.	$u(t,x,y,z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(2x+2y-z+3t)^4} + \frac{1}{1+(2x+2y-z-3t)^4}\right)$ $u(t,x,y,z) = f(t, 2x+2y-z),$ $f_{tt}(t,\xi) = 9f_{\xi\xi}(t,\xi), \quad f(0,\xi) = \frac{1}{1+\xi^4}, \quad f_t(0,\xi) = 0,$ $f(t,\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(\xi+3t)^4} + \frac{1}{1+(\xi-3t)^4}\right)$
10.	$u(t,x,y) = r\sin\varphi + \dfrac{r}{2}\cos\varphi - \dfrac{r^3}{2}\cos 3\varphi = \dfrac{2y + x - x^3 + 3xy^2}{2},$ где $\quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$

Стоимость каждой задачи — два очка.